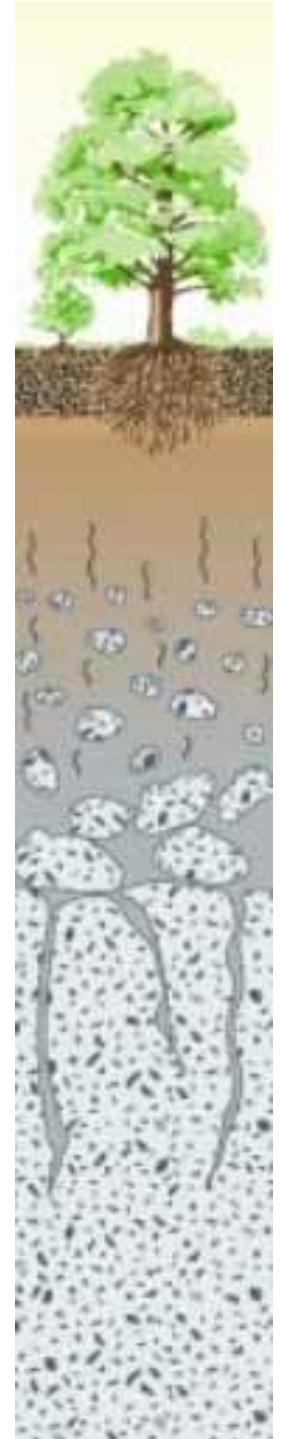


Hydropedologie

Přednáška 8

Proudění vody v pórovitém prostředí

proudění vody v nasyceném prostředí, Darcyho zákon, nasycená hydraulická vodivost, proudění v nenasyceném prostředí, proudění v kapiláře, funkce hydraulické vodivosti



Základní pojmy

System v *rovnováze* = celkový potenciál je ve všech bodech systému stejný

pohyb vody je způsoben přítomností hnacích sil = rozdílem (spádem) potenciálu = systém je v *nerovnovážném stavu*

Pokud není uzavřený systém na okrajích ovlivňován přejde postupně z nerovnovážného do rovnovážného stavu

Pokud kdekoliv v systému v nerovnovážném stavu

... dochází ke změnám rychlosti proudění v čase = *neustálené proudění*

... je rychlost konstantní v čase = *ustálené proudění* (EN: steady state)

Slide 2

M.S.1

V rovnovážném stavu jsou si potenciály rovny ve všech bodech systému. Gradient potenciálu je roven nule.

Michal Snehota; 26.10.2005

Nasycené proudění

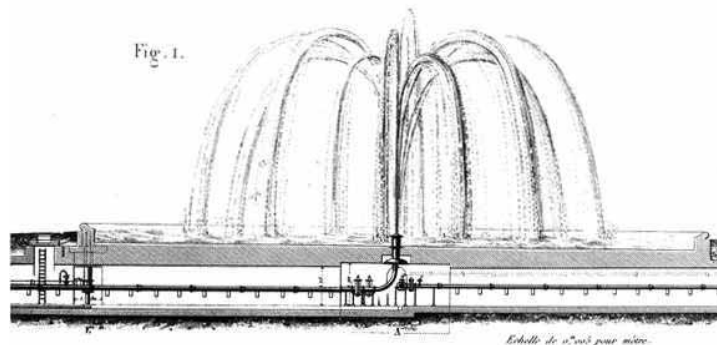


Henry Darcy

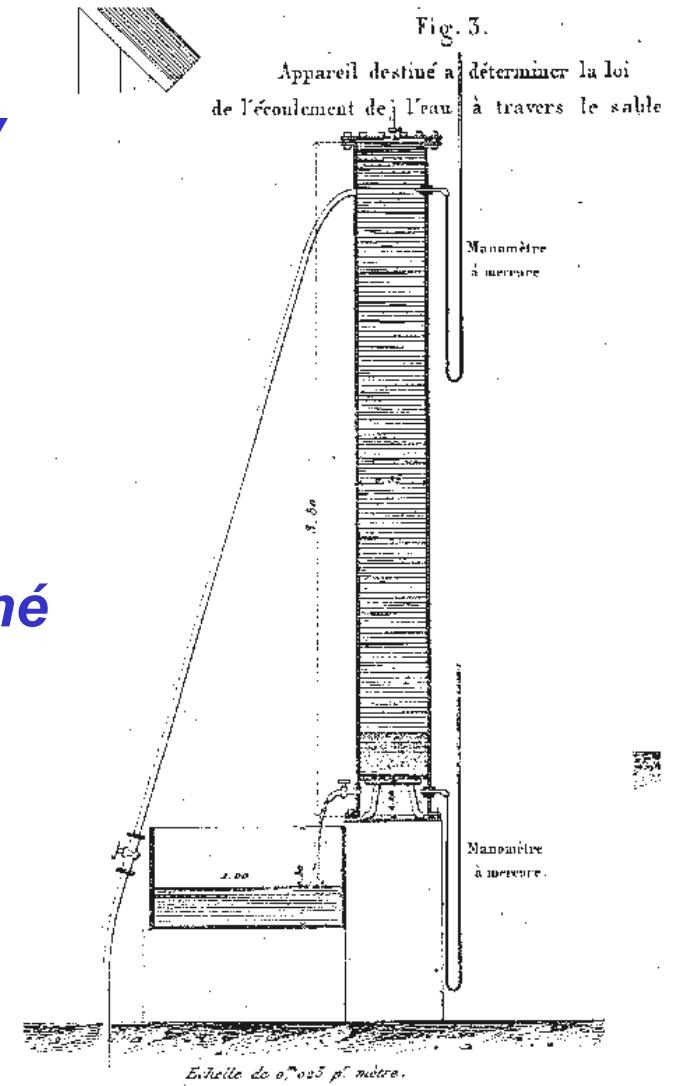
Henry Darcy (1856) řešil problém filtrace vody pro fontány v Dijonu.

Mnoha experimenty zjistil, že **průtok vody** válcem naplněným pískem závisí na:

- přímo úměrný rozdílu hydrostatických tlaků na počátku a konci válce
- nepřímo úměrný délce válce
- přímo úměrný ploše průřezu válce
- závislý na koeficientu lišícím se pro různé materiály



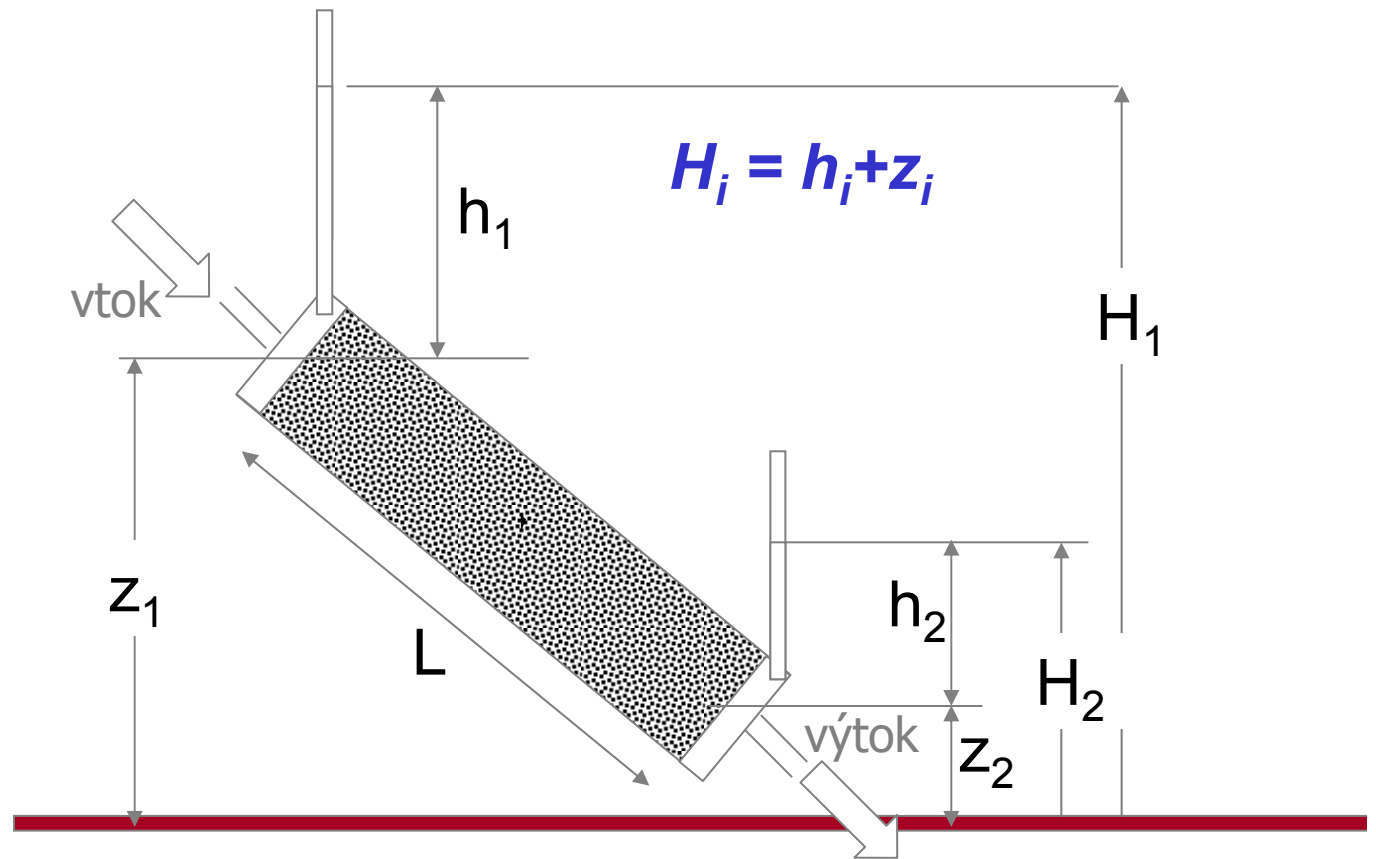
Darcy, H., 1856. *Les Fontaines de la Ville de Dijon*



**Koeficient
nasycené
hydraulické
vodivosti
 K_s**

**Darcyho
zákon**

$$Q = \frac{AK_s \Delta H}{L}$$



**rovnávací
rovina**

**platí pod hladinou
podzemní vody**

Q = průtok vody za jednotkový čas [$L^3 \cdot T^{-1}$]
 A = průtočný průřez [L^2]
 K_s = nasycená hydraulická vodivost [$L \cdot T^{-1}$]
 $\Delta H = H_1 - H_2$ (rozdíl hydraulických výšek) [L]
 L = délka vzorku [L]

Darcyho zákon

*Darcyho zákon
přejde do podoby:*

$$q = K_s \frac{\Delta H}{L}$$

Kde q je objemový tok

$$q = \frac{Q}{A}$$

Q = průtok vody [$L^3 \cdot T^{-1}$]

A = průtočný průřez [L^2]

Zobecnění Darcyho zákona:

$$q = -K_s \frac{dH}{dl}$$

Pro 1D vertikální proudění

$$q = -K_s \frac{dH}{dz} = -K_s \text{ grad } H$$

*Poznámka: záporné
znaménko proto že grad
 H směřuje proti směru
proudění*

Koeficient nasycené vodivosti K_s (EN: saturated hydraulic conductivity)

Nazýván také (nesprávně) *filtrační koeficient* nebo *Darcyho koeficient*

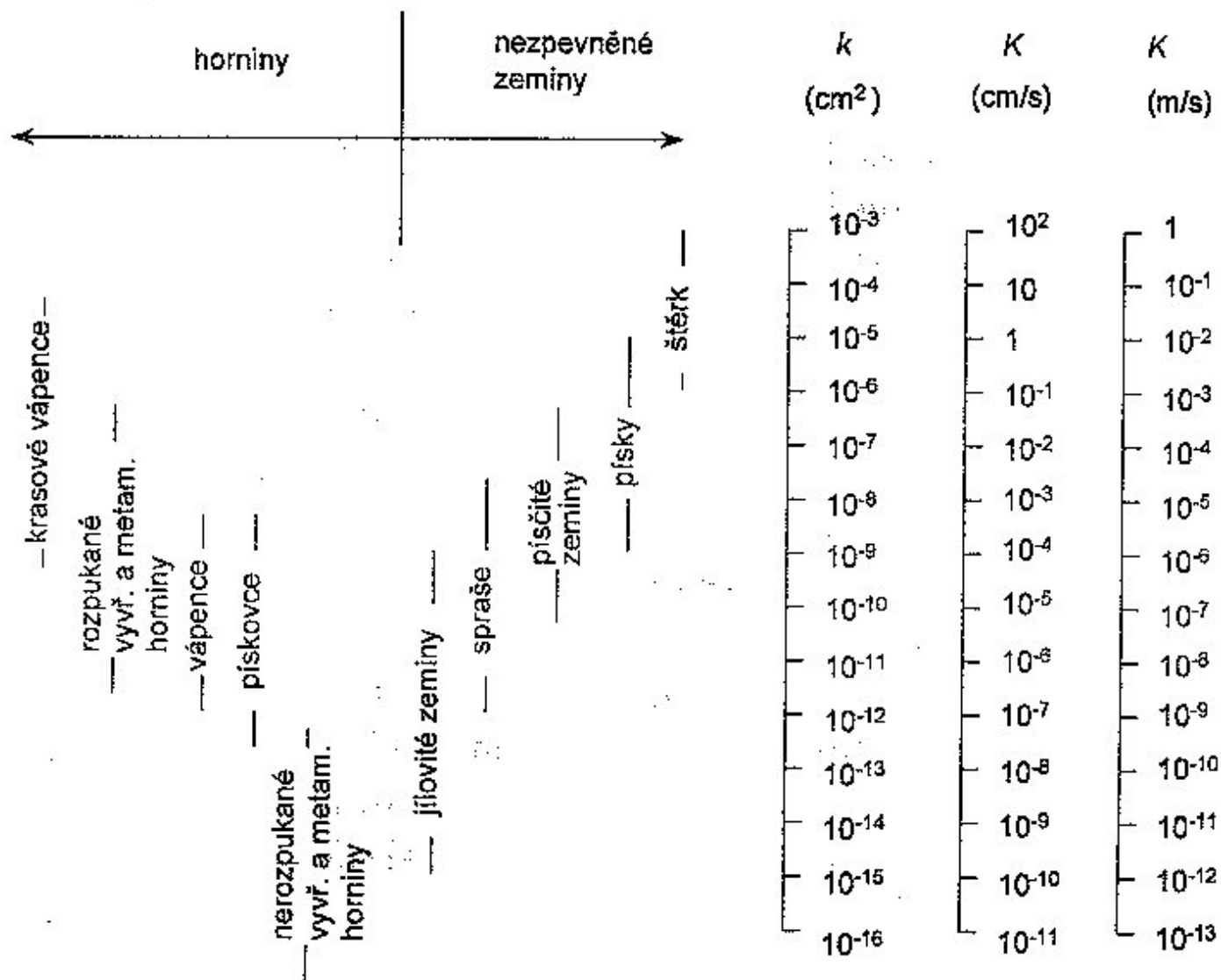
Nejčastěji používané jednotky K_s [$L \cdot T^{-1}$] jsou m/s, cm/d, cm/s

K_s je charakteristikou vztahu půda-voda. Pouze vlastnosti půdy charakterizuje propustnost k (permeability):

$$k = K_s \nu \quad [L^2]$$

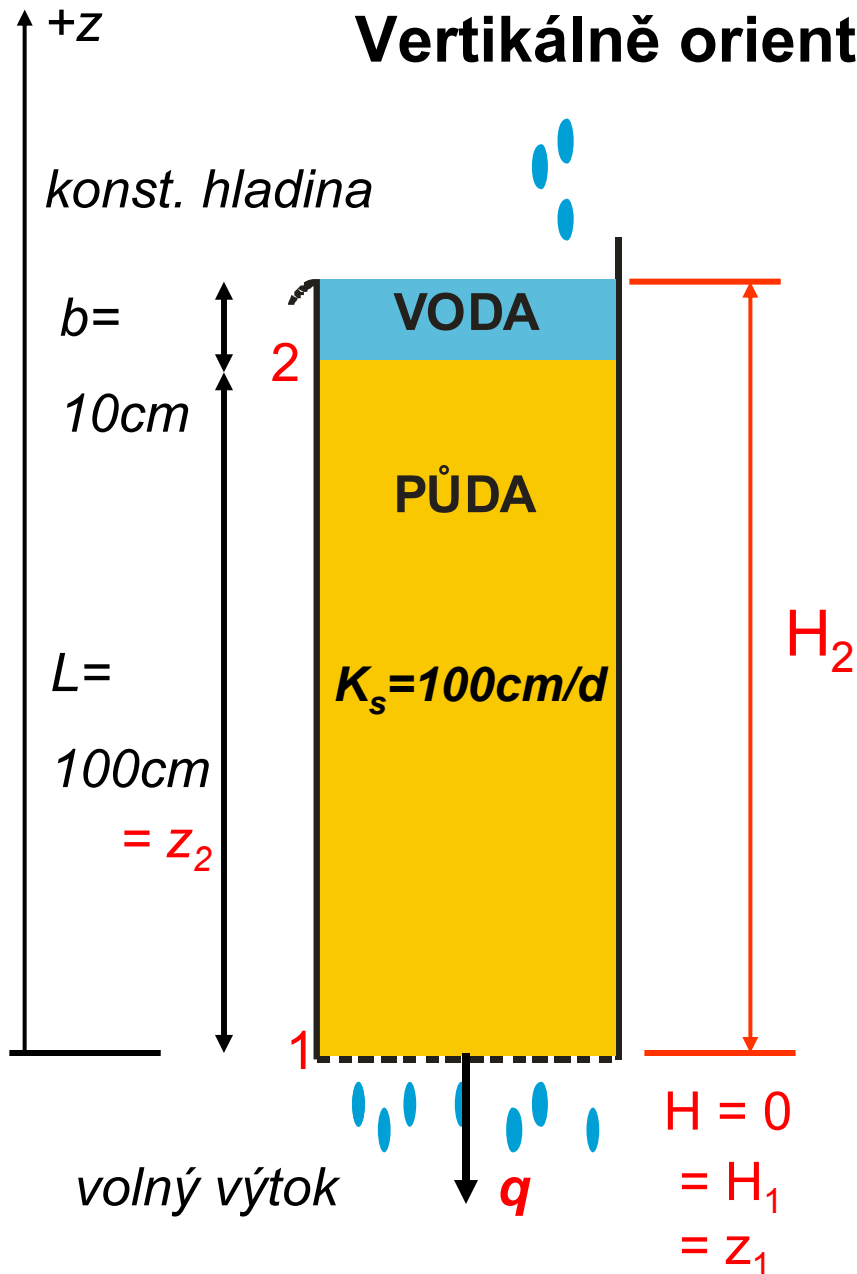
kde ν je kinematičká viskozita

Koeficient nasycené vodivosti K_s a propustnosti pro různé materiály



Příklad 1 :

Vertikálně orientovaný válec půdy: $q=?$



1) Definujeme referenční úroveň a souřadný systém

2) Definujeme body 1 a 2 se známými takovými výškami H

3) Určíme gradient H

$$\text{grad } H = \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1} = \frac{110 - 0}{100 - 0} = 1,1$$

4) q pomocí Darcyho zákona

$$q = -K_s \text{ grad } H = -100 \cdot 1,1 = \underline{\underline{-110\text{cm/d}}}$$

Příklad 2

Horizontálně orientovaný válec půdy: $q=?$

1) Definujeme referenční úroveň a souřadný systém, (x zleva doprava)

2) Definujeme body 1 (vtok) a 2 (výtok). Pak $x_1 = 0$ a $h_1 = 10$ cm, $x_2 = 100$ cm, $h_2 = 0$, $z_1 = z_2 = 0$

3) Hydraulické výšky $H_1 = h_1 + z_1 = 10$ cm, $H_2 = h_2 + z_2 = 0$ cm

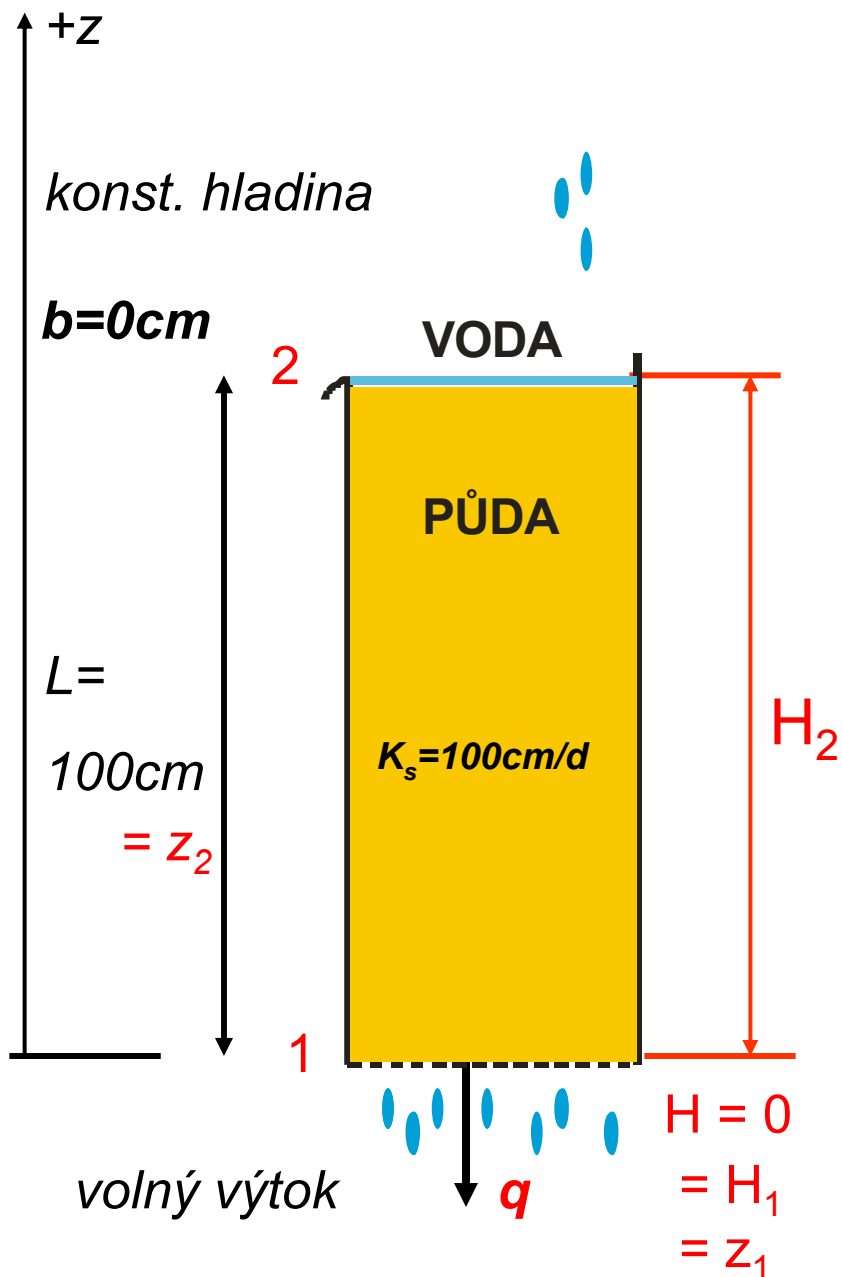
4) Určíme gradient H

$$\text{grad } H = \frac{H_2 - H_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 10}{100 - 0} = -0,1$$

5) Darcyho zákon

$$q = -K_s \text{ grad } H = -100 \cdot (-0,1) = 10 \text{ cm/d}$$

Příklad 3 : gradient $H = ?$, $q = ?$



$$\text{grad } H = \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1} = \frac{100 - 0}{100 - 0} = 1,0$$

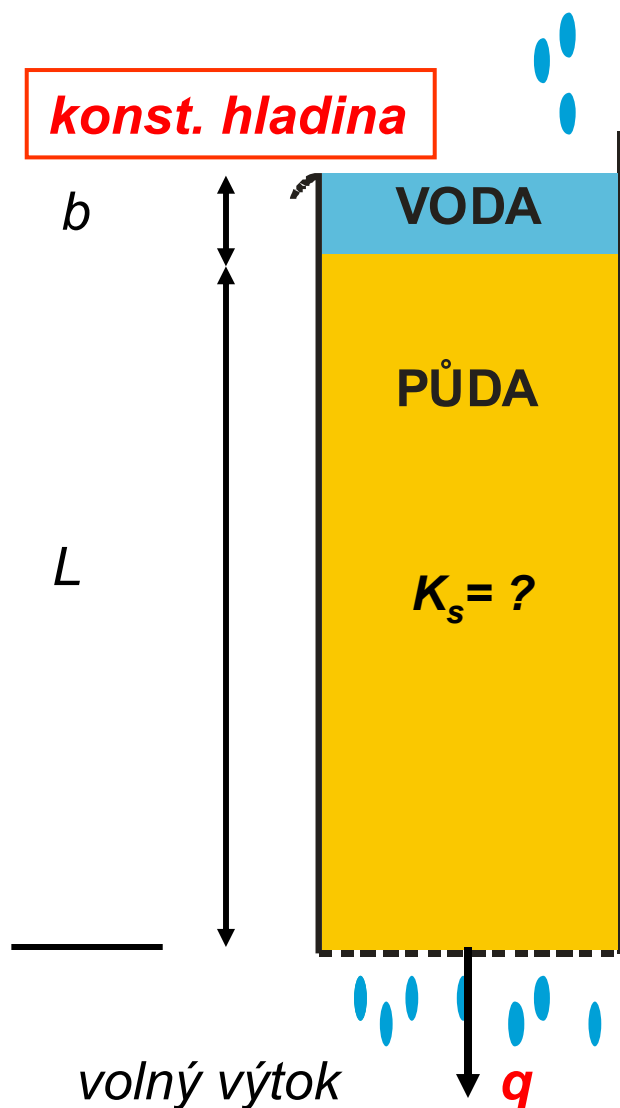
q pomocí Darcyho zákona

$$q = -K_s \text{ grad } H = -K_s \cdot 1,0 = -K_s = -100\text{ cm/d}$$

grad $H = 1$ se nazývá **jednotkový gradient potenciálu**
Hydraulická vodivost je rovna objemovému toku při jednotkovém gradientu potenciálu

Principy měření K_s

1) Měření K_s s konstantním spádem



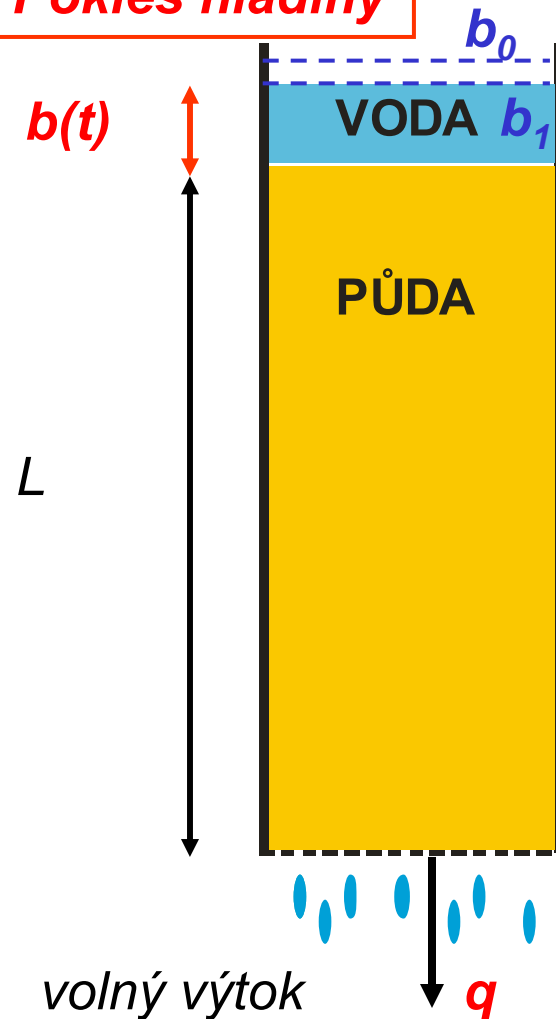
Měření na vzorku půdy v laboratoři
 $H_1 = 0 + 0$ (spodní okraj) $H_2 = b+L$
gradient $H = (b+L)/L$, pak:

$$K_s = \left| \frac{qL}{(b+L)} \right|$$

Principy měření K_s

2) Měření K_s s proměnným spádem (EN: falling-head permeameter)

Pokles hladiny



Měření na vzorku půdy v laboratoři

Hladina na počátku b_0 . $H_2(t) = L + b(t)$, grad $H(t) = [L + b(t)]/L$

$$q = \frac{db}{dt} = -\frac{K_s}{L}(b + L)$$

upravíme na:

$$\frac{db}{b + L} = -\frac{K_s}{L} dt$$

$$\ln B - \ln A = \ln \frac{B}{A}$$

Integrace levé strany

$$\int_{b_0}^{b_1} \frac{db}{b + L} = \ln(b + L) \Big|_{b_0}^{b_1} = \ln \frac{b_1 + L}{b_0 + L}$$

Principy měření K_s

2) Měření K_s s proměnným spádem (EN: falling-head permeameter) pokračování

integrace pravé strany

$$-\int_0^{t_1} \frac{K_s}{L} dt = -\frac{K_s}{L} \int_0^{t_1} dt = -\frac{K_s t_1}{L} \qquad \frac{db}{b+L} = -\frac{K_s}{L} dt$$

po dosazení:

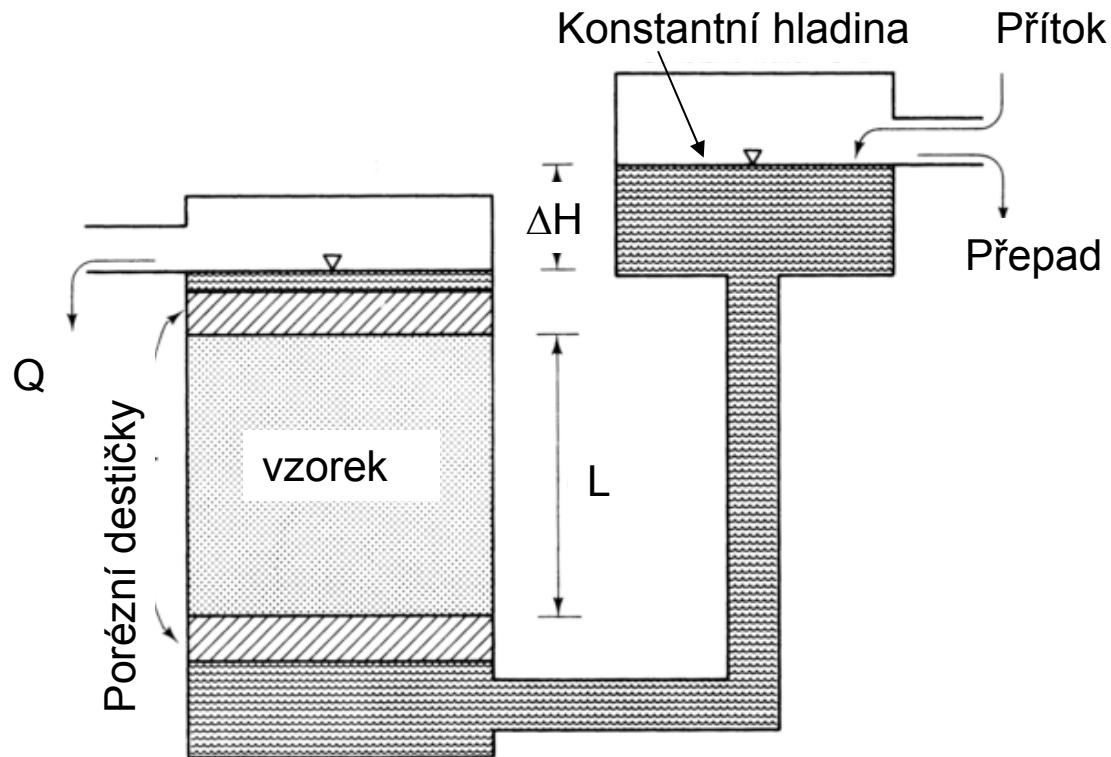
$$\ln \frac{b_1 + L}{b_0 + L} = -\frac{K_s t_1}{L}$$

$$\ln \frac{B}{A} = -\ln \frac{A}{B}$$

$$K_s = \frac{L}{t_1} \ln \frac{b_0 + L}{b_1 + L}$$

Měření K_s

Experiment s konstantním spádem



*Zvláštní úsilí vyžaduje dokonalé nasycení vzorku.
Pokud nasycení není dokonalé **neměříme K_s** .*

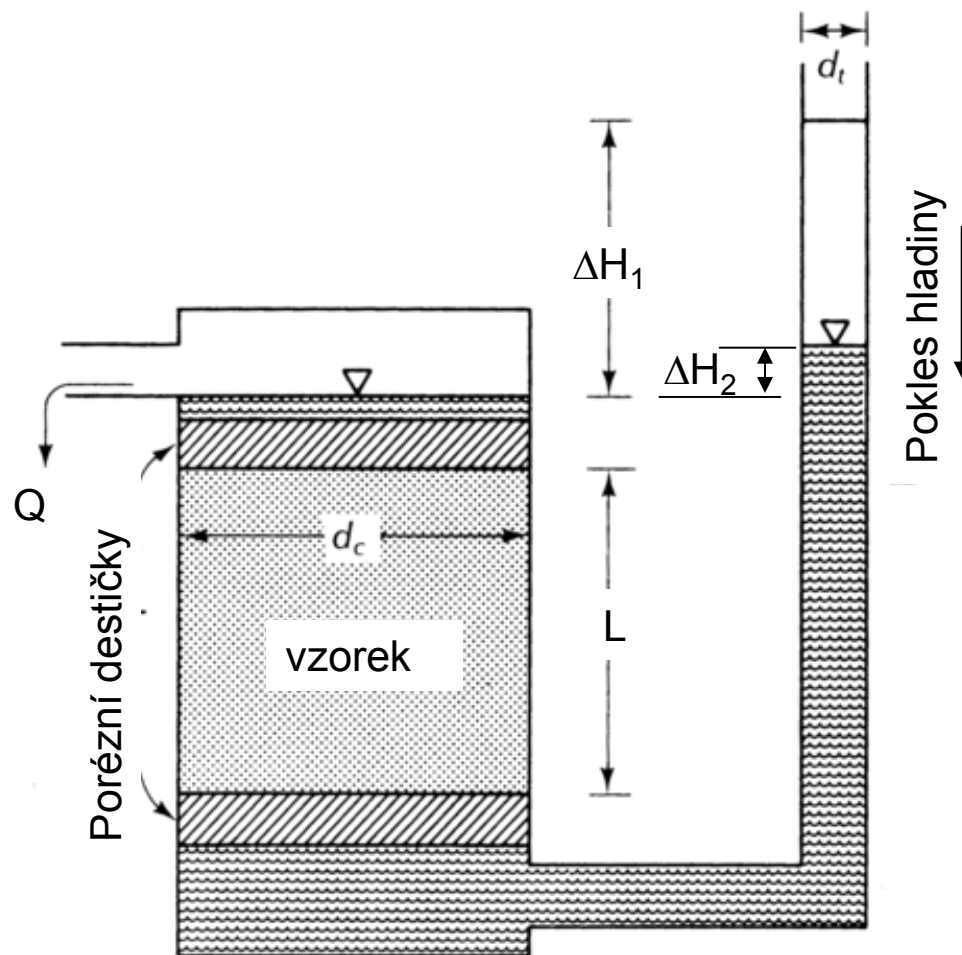
Měření K_s

Experiment s konstantním spádem

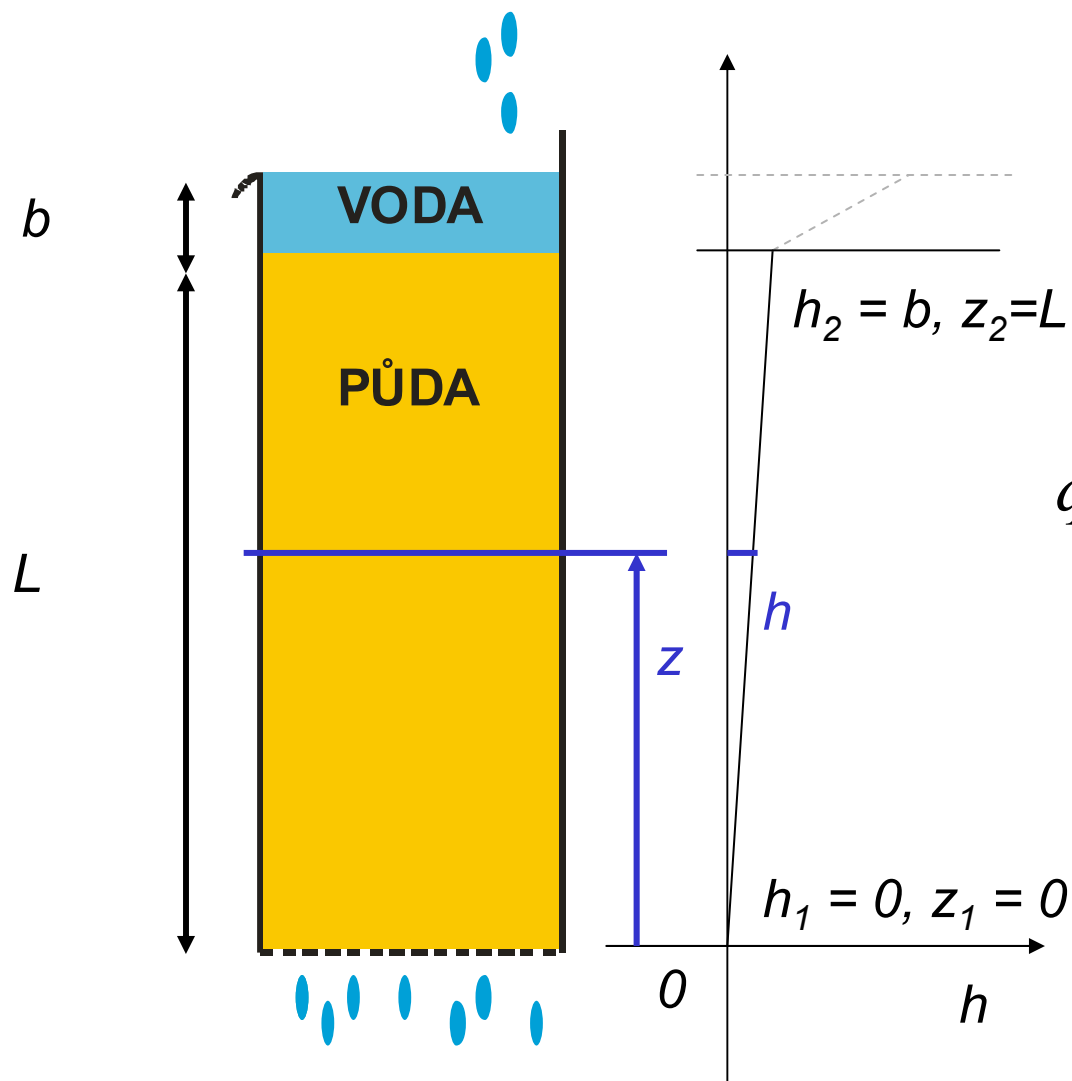


Měření K_s

Experiment s proměnným spádem



Příklad 3: Výpočet průběhu tlakové výšky h



K_s je konstantní, $h(z) = ?$

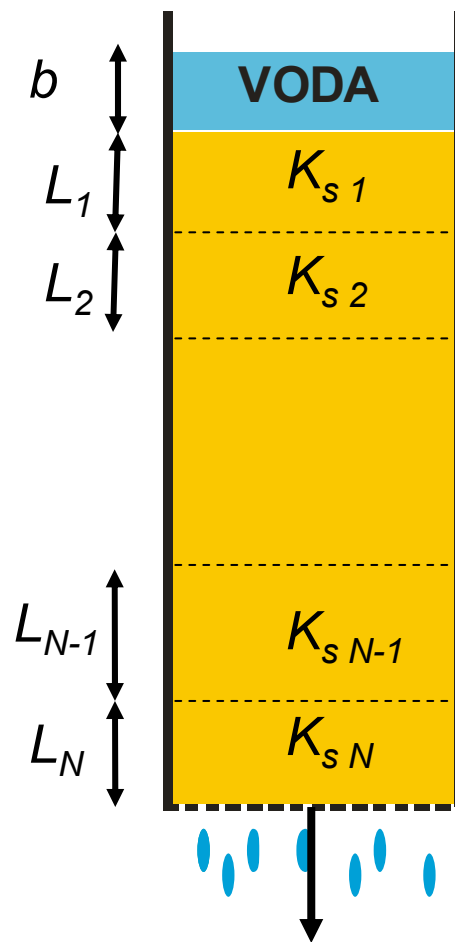
Darcyho zákon:

$$q = -K_s \frac{h+z}{z} = -K_s \frac{b+L}{L}$$

$$h = \frac{b}{L} z$$

V homogenním sloupci nasycené půdy je průběh tlakové výšky h lineární

Nasyčené 1D proudění ve vícervstvěm prostředí



Darcyho zákon je formálně shodný s Ohmovým zákonem.

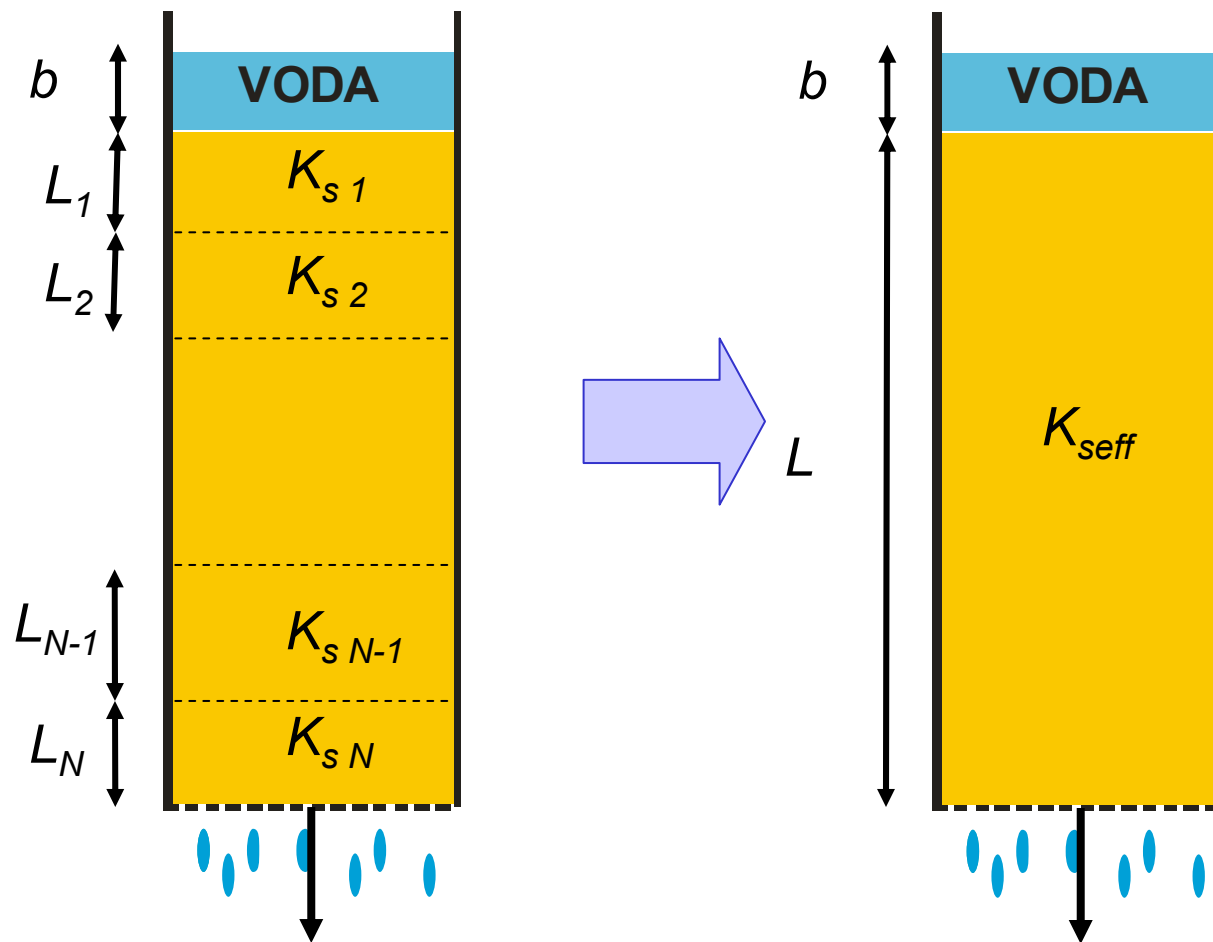
Nasyčené 1D proudění zvrstveným prostředím je analogické obvodu s rezistory v sérii.

Analogií získáme vztah pro efektivní koeficient nasyčené hydraulické vodivosti celého sloupce půdy K_{seff} .

$$K_{seff} = \frac{\sum_{j=1}^N L_j}{\sum_{j=1}^N \frac{L_j}{K_j}}$$

Nasyčené 1D proudění ve vícervstvěném prostředí

Pro výpočet průtoku pak můžeme použít K_{seff}



*Poznámka:
pokud bychom měřili
jednou z uvedených
metod K_s na
zvrstveném vzorku
výsledkem měření
bude K_{seff}*

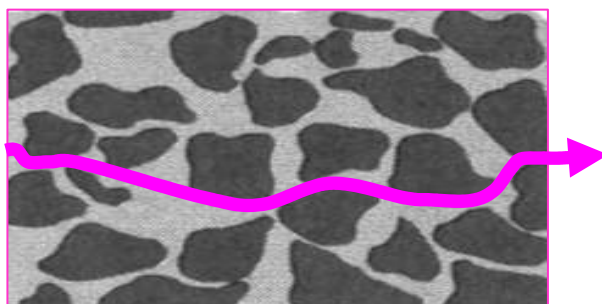
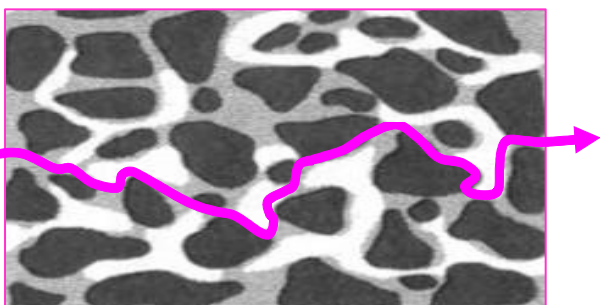
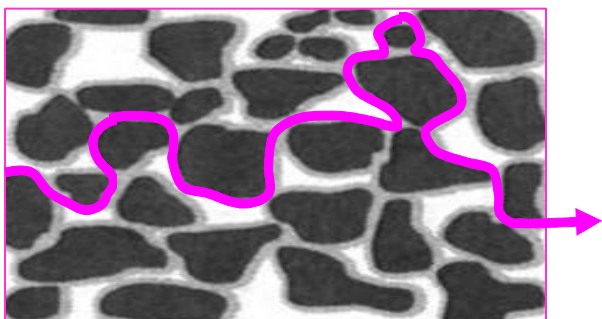
Slide 19

M.S.11

Příklad p. 86/87?

Michal Snehota; 9.11.2005

Proudění v nenasyceném pórovitém prostředí



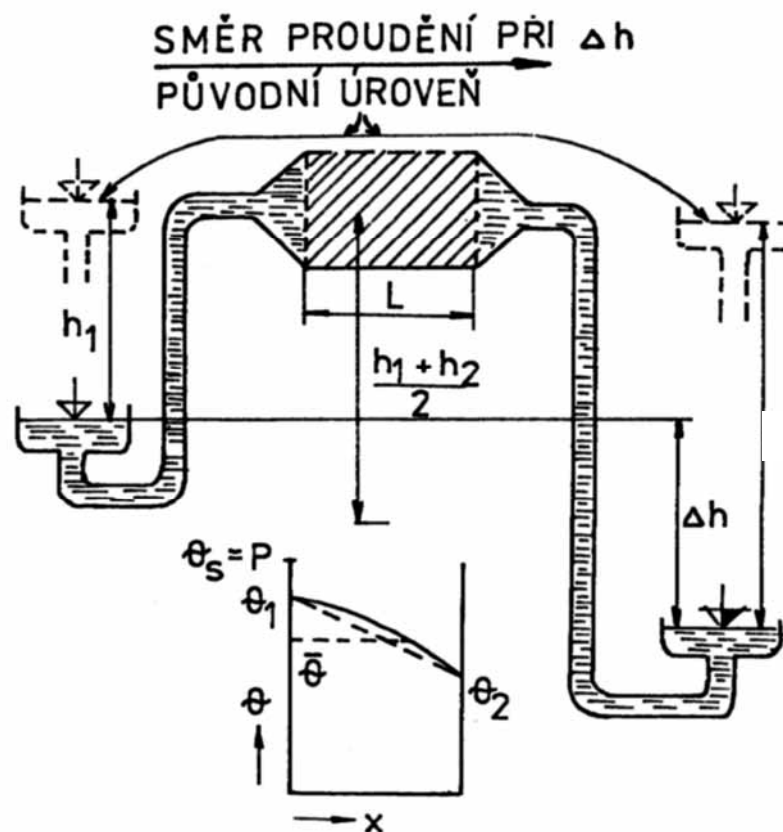
- θ se může měnit v čase a prostoru
- existuje vztah mezi $\theta(h)$ tj. retenční čára
- hydraulická vodivost závisí na θ resp. na h_c .
- závislost $K(\theta)$, resp. $K(h)$ se nazývá funkce hydraulické vodivosti

Darcy-Buckinghamův zákon

Edgar Buckingham (1907)

$$q = -K(\theta)\text{grad}H$$

kde q je objemový tok
 H je hydraulický potenciál



Hydraulická vodivost K

Teorie kapilárních modelů (Childs and Collis-George, 1950)

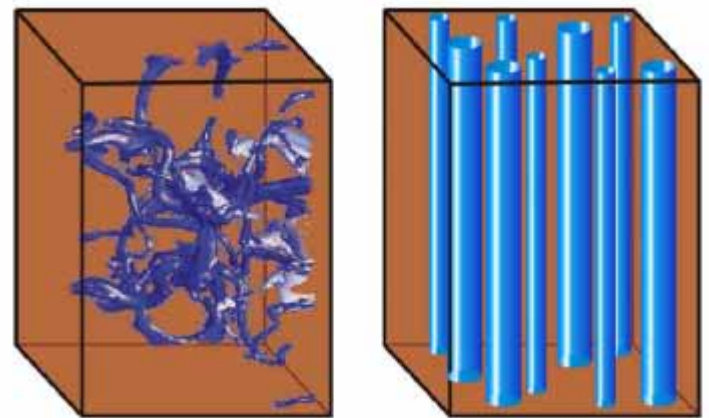
Založena na retenční čáře půdy

Předpokládá, že vztah nasycení-kapilární tlak může být odvozen se statistickým rozdělením velikosti pórů s použitím Laplaceovy rovnice pro kapilární tlak na zakřiveném fázovém rozhraní. Výsledkem jsou vztahy pro snadnou předpověď funkce hydraulické vodivosti.

Předpověď funkce hydraulické vodivosti K'

$$K(\theta) = K_r(\theta)K_s$$

kde K_s je nasycená hydraulická vodivost získaná měřením

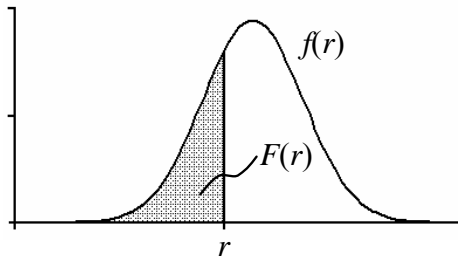


Khaleel

Proudění v nenasyceném prostředí

RETENČNÍ KŘIVKA A STATISTICKÉ ROZDĚLENÍ VELIKOSTI PÓRŮ

Statistické rozdělení velikosti pórů distribuční funkce $F(r)$:



$$F(r) = \int_0^r f(r) dr$$

kde $f(r)$ frekvenční funkce relativního zastoupení pórů různých poloměrů

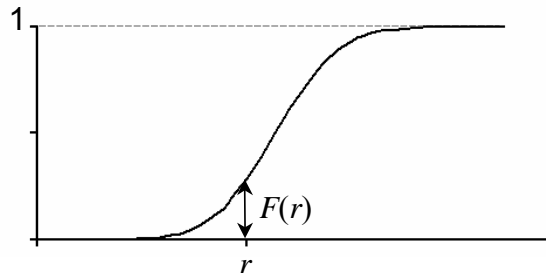
Platí:

$$F(r) = S(r)$$

kde r je poloměr pórů (póry s poloměry $< r$ zaplněné vodou)

Složením $S(r)$ a $h_c(r)$ - retenční křivka:

$$\left. \begin{array}{l} S = S(r) \\ h_c = h_c(r) \end{array} \right\} S = S(h_c)$$



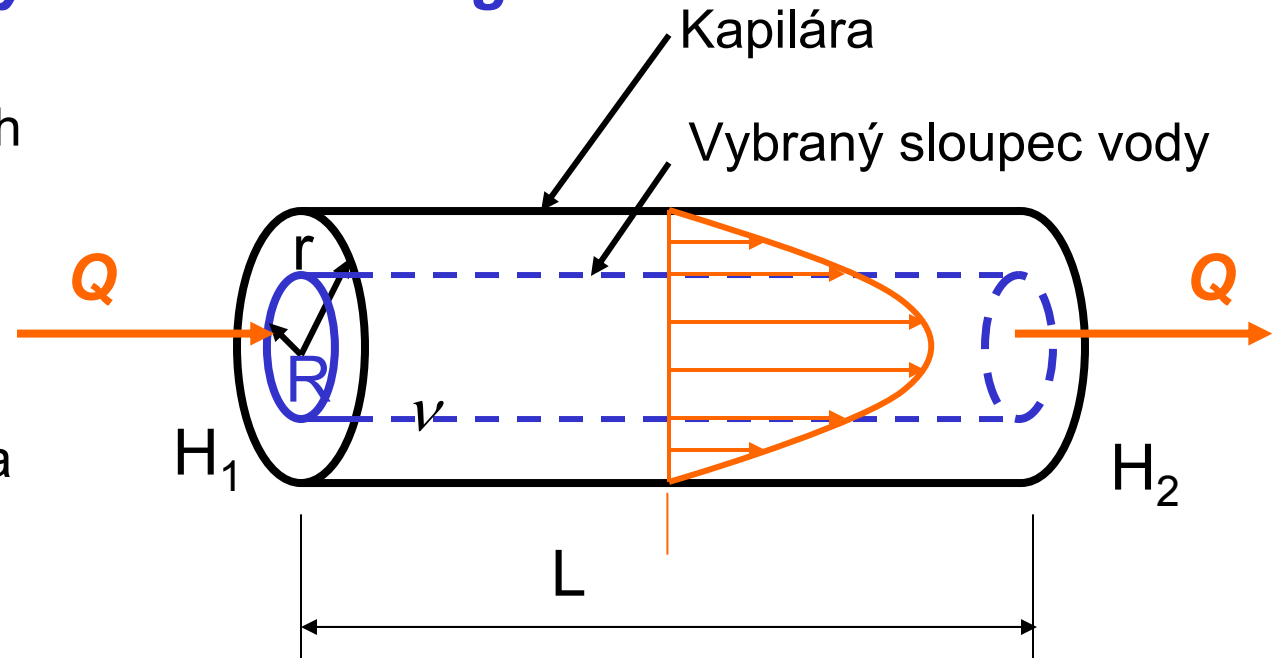
Proudění vody v jedné kapiláře

System s ideální geometrií

Rozdíl hydrostatických tlaků

$$\Delta H = H_2 - H_1$$

síla způsobená Δp =
síla třecích sil vody na
poloměru R



Bodová rychlost na
poloměru R je:

$$u(R) = \frac{\rho_w g \Delta H}{4 L \mu} (r^2 - R^2)$$

Objemový průtok vody kapilárou
Poiseuilleův zákon – laminární
proudění (průtok kapilárou)

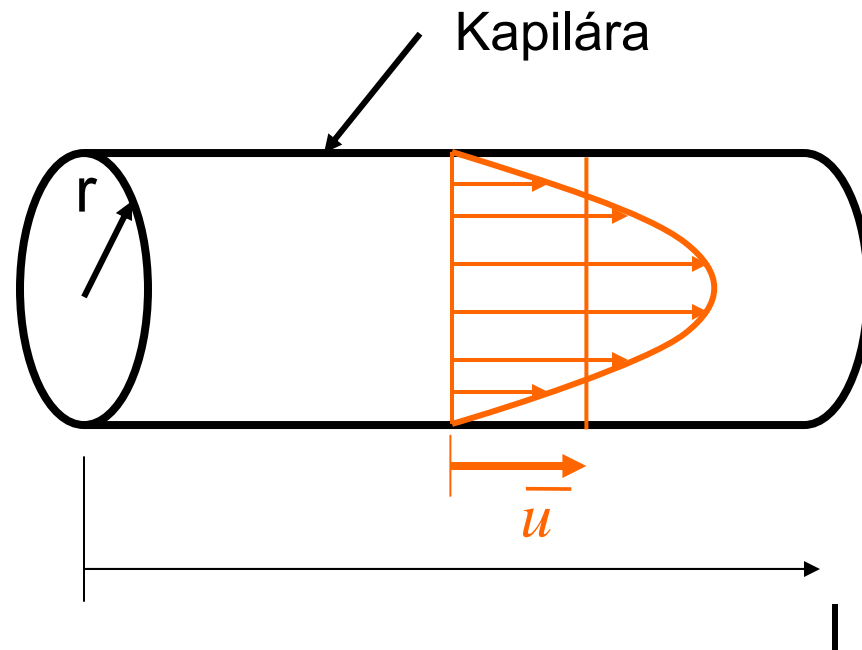
$$Q = - \frac{\rho_w g \pi r^4 \Delta H}{8 \mu L}$$

μ dynamická
viskozita ($\text{Pa} \cdot \text{s}^{-1}$)

Hydraulická vodivost jedné kapiláry

Obecný tvar Poiseuillova zákona pro průměrnou rychlost proudění v kapiláře:

$$\bar{u} = \frac{\rho g}{8\mu} r^2 \frac{dH}{dl}$$



Výraz lze přepsat s hydraulickou vodivostí jedné kapiláry K_1

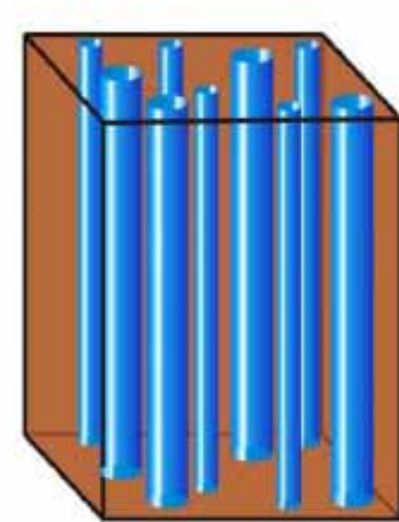
$$\bar{u} = -K_1(r) \frac{dH}{dl}, \quad K_1(r) = \frac{\rho g}{8\mu} r^2 \quad K_1(r) = C_2 r^2$$

Hydraulická vodivost svazku kapilár

Makroskopická rychlost proudění vody svazkem kapilár pak je integrací mikroskopických rychlostí

$$q(A_w) = \frac{1}{A_w} \int_{A_w} u dA = \frac{1}{A_w} \int_{A_w} \bar{u} dA$$

kde A_w je plocha průřezu svazku kapilár naplněného vodou



S předpokladem znalosti **statistického rozložení velikosti pórů** (z retenční křivky) je s použitím **Poiseuillova a Darcy-Buckinghamova** zákona získán pro hydraulickou vodivost svazku kapilár vztah:

$$K(\theta) = C_1^2 C_2 \int_0^\theta \frac{1}{h_c^2} d\theta$$

kde θ ... *objemová vlhkost*

h_c ...*sací tlaková výška*

C_1, C_2 *konstanty*

Relativní hydraulická vodivost

$$K(\theta) = C_1^2 C_2 \int_0^\theta \frac{1}{h_c^2} d\theta$$

Relativní hydraulická vodivost K_r

$$K_r(\theta) = \frac{K(\theta)}{K(\theta_s)} = \frac{\int_0^\theta \frac{d\theta}{h_c^2}}{\int_0^{\theta_s} \frac{d\theta}{h_c^2}}$$

Konstanty C_1^2 a C_2 se zkrátí

kde $K(\theta_s) = K_s$ je nasycená hydraulická vodivost

Modely předpovědi K_r

Relativní hydr. vodivost

Burdine (1953):

$$K_r(\theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^2 \frac{\int_0^\theta \frac{d\theta}{h_c^2}}{\int_0^{\theta_s} \frac{d\theta}{h_c^2}}$$

$$\theta_e(h) = \begin{cases} \left(\frac{H_b}{h}\right)^\lambda & h < H_b \\ 1 & h \geq H_b \end{cases}$$

Brooks a Corey

Po dosazení vztahů pro retenční čáru, a po integraci získáme.....

Mualem (1976):

$$K_r(\theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{1/2} \left[\frac{\int_0^\theta \frac{d\theta}{h_c}}{\int_0^{\theta_s} \frac{d\theta}{h_c}} \right]^2$$

$$\theta_e(h) = \begin{cases} \frac{1}{\left(1 + (-\alpha h)^n\right)^m} & h < 0 \\ 1 & h \geq 0 \end{cases}$$

van Genuchten

V obou výrazech $(\theta/\theta_s)^b$ vliv relativní tortuozity, fiktivního podélného zakřivení kapilár

..... vztahy pro předpověď funkce hydraulické vodivosti z retenční čáry

Funkci relativní vodivosti odvozenou z Brookse a Coreyho

$$K_r(\theta_e) = \theta_e^{b+a/\lambda}$$

kde parametry a a b jsou pro kapilární model Burdina a=2 a b=3

Mualema a=2 a b=2.5

Funkci relativní vodivosti odvozenou z van Genuchtena

$$K_r(\theta_e) = \theta_e^2 \left[1 - \left(1 - \theta_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2$$

s použitím Mualemova kapilárního modelu

θ_e je efektivní vlhkost

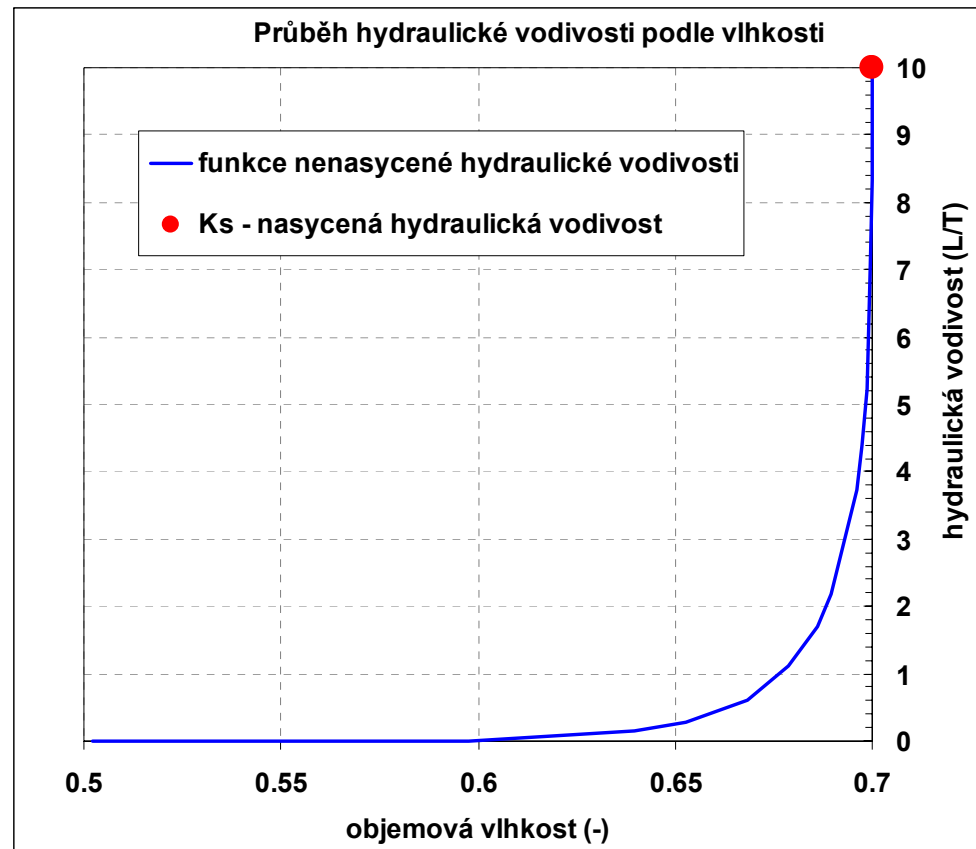
$$\theta_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

Funkce nenasycené hydraulické vodivosti

funkce nenasycené hydraulické vodivosti

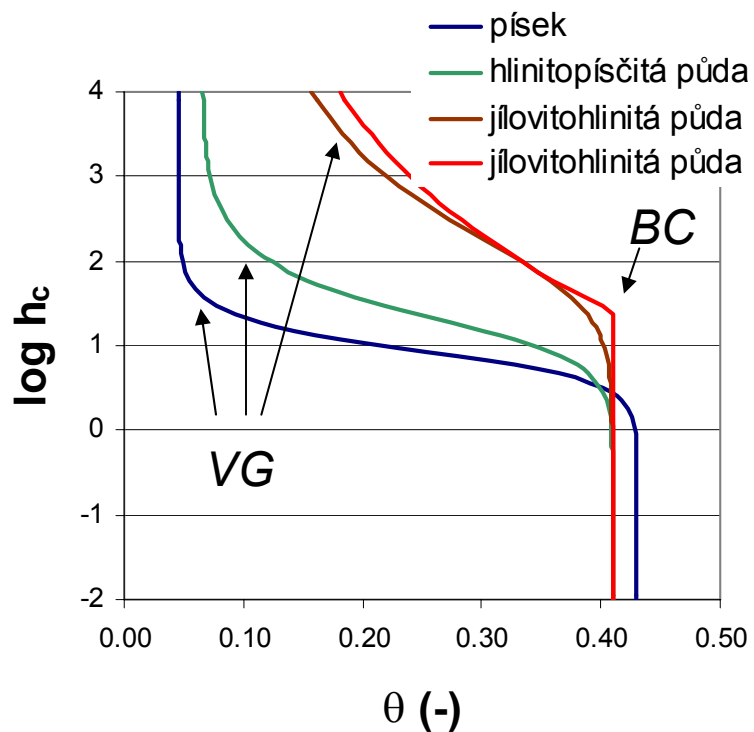
$K(q)$ – část pórů nasycená vodou, část vzduchem

$$K(\theta) = K_s \cdot K_r(\theta)$$

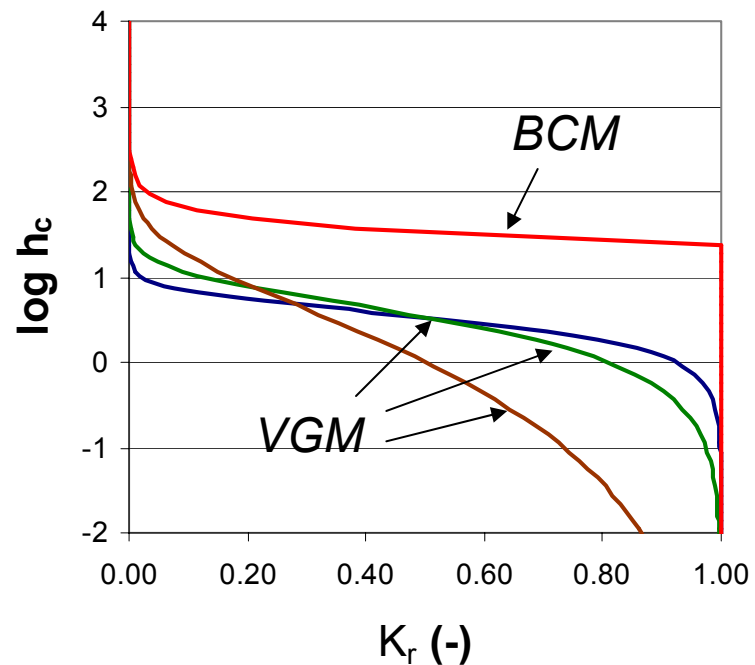


Retenční čára a funkce hydraulické vodivosti některých půdních druhů a různé modely předpovědi K_r

retenční čára



funkce hydraulické vodivosti



Měření funkce nenasyčené hydraulické vodivosti v terénu



**podtlakovým diskovým
infiltrometrem**
*v terénu – měření rychlosti
ustálené infiltrace v
závislosti na nastaveném
podtlaku v disku*

*Pod diskem předpokládáme
jednotkový gradient
potenciálu*

Použitá literatura

Jury, W.A. and R. Horton, Soil Physics. Sixth Edition, 2004.

Císlerová, M. Inženýrská hydroopedologie, skriptum ČVUT 2001

Císlerová M., Vogel T. Transportní procesy, skriptum ČVUT

<http://edis.ifas.ufl.edu/AE266>

*Přednášky kurzu Hydroopedologie vznikly v autorském kolektivu:
Ing. Martin Šanda, PhD a Ing. Michal Sněhota, PhD
Kat. hydromeliorací a krajinného inženýrství, F. stavební ČVUT*